BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2006

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛИ

М.И.АЛИЗАДЕ

Бакинский Государственный Университет

В работе для получения аналитических решений переопределенных систем характеристических дифференциальных уравнений Ли найдены реккурентные операторные соотношения. При этом доказана, что если функция $y(f)$, определенная на группе Ли G, со значениями в пространстве E_y, является решением системы характеристических дифференциальных уравнений Ли, то она удовлетворяет и системе дифференциальных уравнений Ли k-того порядка.

Пусть имеем систему характеристических дифференциальных уравнений Ли:

$$(L_{pq}y)(\alpha(f)) \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_{pq}(f)} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} C_{ij}^{pq}(f)A_{ij} \right\} y(f) = 0$$

$$(p,q = 1,2,\ldots,m), \tag{1}$$

с начальным условием:

$$y(e) = \eta \quad (e \in G, \eta \in E_y), \tag{2}$$

где $A_{ij} \in L(E_y, E_y)$ $(i,j = 1,2,\ldots,m)$- инфинитезимальные операторы представления группы Ли, $C^{pq}(f) = \{C_{ij}^{pq}(f)\}$ - матрицы, такие, что $C_{ij}^{pq}(e) = \delta_{ij}^{pq}$, $\delta_{ij}^{pq} = \begin{cases} 1, & p = i, q = j; \\ 0, & p \neq i, q \neq j. \end{cases}$ L_{pq} - характеристические дифференциальные операторы Ли $(p,q = 1,2,\ldots,m)$. В работе [1] автора найдены необходимые и достаточные условия для полной разрешимости системы характеристических дифференциальных уравнений Ли вида (1), в предположении, когда функции $\{C_{ij}^{pq}(f)\}$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями в окрестности единичного элемента $f = e \in G$. Теперь возникают две задачи:

1) нахождение явного вида аналитического решения системы Ли (1);

2) нахождение условия, обеспечивающего доказательства обратной теоремы, а точнее, когда решение обобщенной системы характеристических дифференциальных уравнений Ли будет решением векторного функционального уравнения

$$y((f)) = T(\alpha(fg))y(\alpha(g^{-1})) , \tag{3}$$

где $y(\alpha(f)) \in E_y$ - банахово пространство.

Здесь получена следующая

Теорема 1. Пусть $C(f) = \{C_{ij}^{pq}(f)\}$ - непрерывно-дифференцируемая матрица в окрестности D единичного элемента $f = e \in G, A_{ij} \in L(E_y, E_y)$ $(i, j = 1,2,...,m)$ - конечное семейство ограниченных инфинитезимальных операторов. Тогда обобщенная система характеристических дифференциальных уравнений Ли (1) вполне разрешима, если и только если выполняются обобщенные перестановочные операторные соотношения Ли:

$$A_{pq}A_{ks} - A_{ks}A_{pq} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} D_{ijpqks}A_{ij} \quad (p,q,k,s = 1,2,...,m). \tag{4}$$

При выполнении условия полной разрешимости (4) аналитическое решение системы уравнений (1) с начальным условием (2) представимо в виде:

$$y(f) = \eta + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left\{\sum_{i_1 j_1 \dots i_k j_k}\left(\frac{\partial^k y(f)}{\partial\alpha_{i_1 j_1}(f)\dots\partial\alpha_{i_k j_k}(f)}\right)_{f=e} \times \prod_{t=1}^{m}\left(\alpha_{i_t j_t}(f) - \alpha_{i_t j_t}(e)\right)\right\}, \tag{5}$$

где $\sum\limits_{i_1 j_1 \dots i_k j_k} = \underbrace{\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{m}\dots\sum_{i_k=1}^{m}\sum_{i_k=1}^{m}}_{k}$; производные $\left(\frac{\partial^k y(f)}{\partial\alpha_{i_1 j_1}(f)\dots\partial\alpha_{i_k j_k}(f)}\right)_{f=e}$ вычисляются по следующим рекуррентным соотношениям

$$A^{p_1 q_1 \cdots p_k q_k p_{k+1} q_{k+1}} \equiv \sum_{i_1 j_1 \dots i_k j_k}\Big\{D^{p_1 q_1}_{i_1 j_1 p_{k+1} q_{k+1}}\delta^{p_2 q_2}_{i_2 j_2}\delta^{p_3 q_3}_{i_3 j_3}\dots\delta^{p_k q_k}_{i_k j_k} + D^{p_2 q_2}_{i_2 j_2 p_{k+1} q_{k+1}}\delta^{p_1 q_1}_{i_1 j_1}\delta^{p_3 q_3}_{i_3 j_3}\dots\delta^{p_k q_k}_{i_k j_k} + \dots +$$

$$+ D^{p_k q_k}_{i_k j_k p_{k+1} q_{k+1}}\delta^{p_2 q_2}_{i_2 j_2}\delta^{p_1 q_1}_{i_1 j_1}\dots\delta^{p_{k-1} q_{k-1}}_{i_{k-1} j_{k-1}}\Big\}A_{i_1 j_1 \dots i_k j_k} + \sum_{i_1 j_1 \dots i_k j_k i_{k+1} j_{k+1}}\delta^{p_1 q_1}_{i_1 j_1}\delta^{p_2 q_2}_{i_2 j_2}\dots\delta^{p_k q_k}_{i_k j_k}\delta^{p_{k+1} q_{k+1}}_{i_{k+1} j_{k+1}}A_{i_1 j_1 \dots i_k j_k}A_{i_{k+1} j_{k+1}}, \tag{6}$$

где $\delta^{p_t q_t}_{i_t j_t} = \begin{Bmatrix} 1, \ p_t = i_t, q_t = j_t \\ 0, \ p_t \neq i_t, q_t \neq j_t \end{Bmatrix}_{(t=1,2,\dots,k+1)}$.

Для доказательства теоремы 1 докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Если $y : G \to E_y$ является решением системы характеристических дифференциальных уравнений Ли (1), то она удовлетворяет и следующей системе характеристических дифференциальных уравнений Ли k-того порядка:

$$\left(L_{p_1q_1\dots p_kq_k}y\right)(\alpha(f)) \equiv \frac{\partial^k y(f)}{\partial\alpha_{p_1q_1}(f)\dots\partial\alpha_{p_kq_k}(f)} - \sum_{i_1j_1\dots i_kj_k} C^{p_1q_1}_{i_1j_1}(f)\dots C^{p_kq_k}_{i_kj_k}(f)A_{i_1j_1\dots i_kj_k}y(f) = 0$$

$$\left(p_1, q_1, \dots, p_k, q_k = 1,2,\dots,m\right), \qquad (7)$$

где $L_{p_1q_1\dots p_kq_k}$ $\left(p_1, q_1, \dots, p_k, q_k = 1,2,\dots,m\right)$ - характеристические дифференциальные операторы Ли, $A_{i_1j_1\dots i_kj_k}$ - инфинитезимальные операторы Ли, $\left\{C^{p_tq_t}_{i_tj_t}(f)\right\}$ - матрицы $(t = 1,2,\dots,k)$, такие, что

$$\left\{C^{p_tq_t}_{i_tj_t}(e)\right\} = \delta^{p_tq_t}_{i_tj_t} = \begin{cases} 1, \ p_t = i_t, \ q_t = j_t, \\ 0, \ p_t \ne i_t, \ q_t \ne j_t. \end{cases}$$

Замечание:

$$\frac{\partial^k y(f)}{\partial\alpha_{p_1q_1}(f)\dots\partial\alpha_{p_kq_k}(f)} = \sum_{i_1j_1\dots i_kj_k}^{m}\left(\frac{\partial^k T(fg)}{\partial\alpha_{i_1j_1}(fg)\dots\partial\alpha_{i_kj_k}(fg)}\cdot\frac{\partial\varphi_{i_1j_1}(fg)}{\partial\alpha_{p_1q_1}(f)}\dots\cdot\frac{\partial\varphi_{i_kj_k}(f)}{\partial\alpha_{p_kq_k}(f)}y(g^{-1})\right),$$

$$\frac{\partial^k y(\alpha(f))}{\partial\alpha_{p_1q_1}(f)\dots\partial\alpha_{p_kq_k}(f)} \equiv \sum_{i_1j_1\dots i_kj_k} A_{i_1j_1\dots i_kj_k}C^{p_1q_1}_{i_1j_1}(f)\dots C^{p_kq_k}_{i_kj_k}(f)g(\alpha(f)).$$

Доказательство леммы 1. Дифференцируя систему уравнений (7) по элементу $\alpha_{p_{k+1}j_{k+1}}(f)$ получаем:

$$\frac{\partial^{k+1} y(f)}{\partial\alpha_{p_1q_1}(f)\dots\partial\alpha_{p_kq_k}(f)\partial\alpha_{p_{k+1}q_{k+1}}(f)} = \sum_{i_1j_1\dots i_kj_k}\left\{\frac{\partial C^{p_tq_t}_{i_tj_t}(f)}{\partial\alpha_{p_{k+1}q_{k+1}}}C^{p_2q_2}_{i_2j_2}(f)\dots C^{p_kq_k}_{i_kj_k}(f)A_{i_1j_1\dots i_kj_k}y(f) + \right.$$

$$+ C^{p_1q_1}_{i_1j_1}(f)\frac{\partial C^{p_2q_2}_{i_2j_2}(f)}{\partial\alpha_{p_{k+1}q_{k+1}}(f)}C^{p_3q_3}_{i_3j_3}(f)\dots C^{p_kq_k}_{i_kj_k}(f)A_{i_1j_1\dots i_kj_k}y(f) + \dots +$$

$$+ \frac{\partial C^{p_{k-1}q_{k-1}}_{i_{k-1}j_{k-1}}(f)}{\partial\alpha_{p_{k+1}q_{k+1}}(f)}C^{p_kq_k}_{i_kj_k}(f)A_{i_1j_1\dots i_kj_k}y(f)C^{p_1q_1}_{i_1j_1}(f)\dots C^{p_{k-1}q_{k-1}}_{i_{k-1}j_{k-1}}(f) +$$

$$\left. + C^{p_1q_1}_{i_1j_1}(f)C^{p_2q_2}_{i_2j_2}(f)\dots C^{p_kq_k}_{i_kj_k}(f)A_{i_1j_1\dots i_kj_k}\frac{\partial y(f)}{\partial\alpha_{i_{k+1}j_{k+1}}(f)}\right\} =$$

$$= \sum_{i_1j_1\dots i_kj_k}\frac{\partial C^{p_1q_1}_{i_1j_1}(f)}{\partial\alpha_{p_{k+1}q_{k+1}}(f)}C^{p_2q_2}_{i_2j_2}(f)\dots C^{p_kq_k}_{i_kj_k}(f)A_{i_1j_1\dots i_kj_k}y(f) +$$

$$+\sum_{i_1 j_1 \ldots i_k j_k} \frac{\partial C_{i_2 j_2}^{p_2 q_2}(f)}{\partial \alpha_{p_{k+1} q_{k+1}}(f)} C_{i_1 j_1}^{p_1 q_1}(f) \ldots C_{i_k j_k}^{p_k q_k}(f) A_{i_1 j_1 \ldots i_k j_k} y(f) + \ldots +$$

$$+\sum_{i_1 j_1 \ldots i_k j_k} \frac{\partial C_{i_k j_k}^{p_k q_k}(f)}{\partial \alpha_{p_{k+1} q_{k+1}}(f)} C_{i_1 j_1}^{p_1 q_1}(f) \ldots C_{i_{k-1} j_{k-1}}^{p_{k-1} q_{k-1}}(f) A_{i_1 j_1 \ldots i_k j_k} y(f) +$$

$$+\sum_{i_1 j_1 \ldots i_k j_k i_{k+1} j_{k+1}} C_{i_1 j_1}^{p_1 q_1}(f) \ldots C_{i_k j_k}^{p_k q_k}(f) C_{i_{k+1} j_{k+1}}^{p_{k+1} q_{k+1}}(f) A_{i_1 j_1 \ldots i_k j_k} A_{i_{k+1} j_{k+1}} y(f).$$

Используя тождество:

$$\frac{\partial C_{i_t j_t}^{p_t q_t}(f)}{\partial \alpha_{p_{k+1} q_{k+1}}(f)} = \sum_{i_{k+1}=1}^{m} \sum_{j_{k+1}=1}^{m} e_{i_{k+1} j_{k+1}}^{p_{k+1} q_{k+1}} \frac{\partial C_{i_{k+1} j_{k+1}}^{p_{k+1} q_{k+1}}(f)}{\partial \alpha_{p_{k+1} q_{k+1}}(f)},$$

$$\frac{\partial C_{i_t j_t}^{p_t q_t}}{\partial \alpha_{p_{k+1} q_{k+1}}} = \sum_{i_{k+1}=1}^{m} \sum_{j_{k+1}=1}^{m} e_{i_{k+1} j_{k+1}} \frac{\partial C_{i_t j_t}^{p_t q_t}}{\partial \alpha_{p_{k+1} q_{k+1}}} \quad (t = 1, 2, \ldots, k),$$

все k суммы можно записать как суммы $k+1$. А именно

$$\frac{\partial^{k+1} y(f)}{\partial \alpha_{p_1 q_1} \ldots \partial \alpha_{p_k q_k} \partial \alpha_{p_{k+1} q_{k+1}}} = \sum_{i_1 j_1 \ldots i_k j_k i_{k+1} j_{k+1}} \left\{ \frac{\partial C_{i_1 j_1}^{p_1 q_1}(f)}{\partial \alpha_{p_{k+1} q_{k+1}}(f)} C_{i_2 j_2}^{p_2 q_2} \ldots C_{i_k j_k}^{p_k q_k} \delta_{i_{k+1} j_{k+1}}^{p_{k+1} q_{k+1}} A_{i_1 j_1 \ldots i_k j_k} + \right.$$

$$+ \frac{\partial C_{i_2 j_2}^{p_2 q_2}}{\partial \alpha_{p_{k+1} q_{k+1}}} C_{i_1 j_1}^{p_1 q_1} C_{i_3 j_3}^{p_3 q_3} \ldots C_{i_k j_k}^{p_k q_k} \delta_{i_{k+1} j_{k+1}}^{p_{k+1} q_{k+1}} A_{i_1 j_1 \ldots i_k j_k} + \ldots + \frac{\partial C_{i_k j_k}^{p_k q_k}}{\partial \alpha_{p_{k+1} q_{k+1}}} C_{i_1 j_1}^{p_1 q_1} \ldots C_{i_{k-1} j_{k-1}}^{p_{k-1} q_{k-1}} \delta_{i_{k+1} j_{k+1}}^{p_{k+1} q_{k+1}} A_{i_1 j_1 \ldots i_k j_k} +$$

$$\left. + C_{i_1 j_1}^{p_1 q_1} C_{i_2 j_2}^{p_2 q_2} \ldots C_{i_k j_k}^{p_k q_k} \delta_{i_{k+1} j_{k+1}}^{p_{k+1} q_{k+1}} A_{i_1 j_1 \ldots i_k j_k} A_{i_{k+1} j_{k+1}} \right\} y(f). \tag{8}$$

Таким образом, соотношение (7) доказано. Следовательно, лемма доказана. Соотношение (8) вычисляем в точке $f = e \in G$, при этом получим следующие рекуррентные формулы:

$$\left(\frac{\partial^{k+1} y(f)}{\partial \alpha_{p_1 q_1}(f) \ldots \partial \alpha_{p_k q_k}(f) \partial \alpha_{p_{k+1} q_{k+1}}(f)} \right)_{f=e} = A_{p_1 q_1 \ldots p_k q_k p_{k+1} q_{k+1}} =$$

$$+ \sum_{i_1 j_1 \ldots i_k j_k i_{k+1} j_{k+1}} \delta_{i_1 j_1}^{p_1 q_1} \delta_{i_2 j_2}^{p_2 q_2} \ldots \delta_{i_k j_k}^{p_k q_k} \delta_{i_{k+1} j_{k+1}}^{p_{k+1} q_{k+1}} A_{i_1 j_1 \ldots i_k j_k} A_{i_{k+1} j_{k+1}} + \sum_{i_1 j_1 \ldots i_k j_k} \left\{ D_{i_1 j_1 p_{k+1} q_{k+1}}^{p_1 q_1} \delta_{i_2 j_2}^{p_2 q_2} \ldots \delta_{i_k j_k}^{p_k q_k} + \right.$$

$$\left. + D_{i_2 j_2 p_{k+1} q_{k+1}}^{p_2 q_2} \delta_{i_1 j_1}^{p_1 q_1} \delta_{i_3 j_3}^{p_3 q_3} \ldots \delta_{i_k j_k}^{p_k q_k} + \ldots + D_{i_k j_k p_{k+1} q_{k+1}}^{p_k q_k} \delta_{i_1 j_1}^{p_1 q_1} \ldots \delta_{i_{k-1} j_{k-1}}^{p_{k-1} q_{k-1}} \right\} A_{i_1 j_1 \ldots i_k j_k}. \tag{9}$$

В этом соотношении если взять $k=1$, то получим:

$$A_{p_1q_1p_2q_2}=A_{p_1q_1}A_{p_2q_2}+\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{m}D_{i_1j_1p_2q_2}^{p_1q_1}A_{i_1j_1}\ .$$

Отсюда, в силу симметричности вторых дифференциалов $\dfrac{\partial^2}{\partial\alpha_{p_1q_1}\partial\alpha_{p_2q_2}}=\dfrac{\partial^2}{\partial\alpha_{p_2q_2}\partial\alpha_{p_1q_1}}$, получим: $A_{p_1q_1p_2q_2}=A_{p_2q_2p_1q_1}$, т.е.

$$A_{p_1q_1}A_{p_2q_2}+\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{m}D_{i_1j_1p_2q_2}^{p_1q_1}A_{i_1j_1}=A_{p_2q_2}A_{p_1q_1}+\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{m}D_{i_1j_1p_2q_2}^{p_1q_1}A_{i_1j_1}$$

или

$$A_{p_1q_1}A_{p_2q_2}-A_{p_2q_2}A_{p_1q_1}=\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{m}\left\{D_{i_1j_1p_2q_2}^{p_1q_1}-D_{i_1j_1p_1q_1}^{p_1q_1}\right\}A_{i_1j_1}\ ,$$

$$A_{p_1q_1}A_{p_2q_2}-A_{p_2q_2}A_{p_1q_1}=\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{m}C_{i_1j_1p_1q_1p_2q_2}A_{i_1j_1}\ ,$$

$$A_{pq}A_{rs}-A_{rs}A_{pq}=\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{m}C_{ijpqrs}A_{ij}$$

$$(p,q,r,s=1,2,\dots,m)\,, \tag{10}$$

где $A_{2\beta}\in L(E_y,E_y)$ - инфинитезимальные операторы $(\alpha,\beta=1,2,\dots,m)$, а $C_{ijpqrs}^{\widetilde{pq}}=-C_{ijrspq}^{\widetilde{pq}}$ - структурные константы группы Ли (см. [2]). Теперь, используя соотношения (10), мы можем записать явный вид аналитического решения обобщенной системы характеристических дифференциальных уравнений Ли:

$$y(f)=\eta+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left\{\sum_{p_1q_1\cdots p_kq_k}\left(\frac{\partial^k y(f)}{\partial\alpha_{p_1q_1}(f)\dots\partial\alpha_{p_kq_k}(f)}\right)_{f=e}\times\prod_{t=1}^{m}\left(\alpha_{p_tq_t}(f)\dots\partial\alpha_{p_tq_t}(e)\right)\right\},(11)$$

где $\displaystyle\sum_{p_1q_1\dots p_kq_k}=\underbrace{\sum_{p_1=1}^{m}\sum_{q_1=1}^{m}\dots\sum_{p_k=1}^{m}\sum_{q_k=1}^{m}}_{k}$, а производные k-того порядка от функции $y(f)$ в точке $f=e$ вычисляются по установленным выше рекуррентным формулам (9).

В заключение выражаю искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору М.Б.Рагимову за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ализаде М.И. Нахождение условия полной разрешимости обобщенной системы характеристических дифференциальных уравнений Ли. Вестник Бакинского Университета, серия физ.мат. наук, №2, 1999, с. 7-10.
2. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. Москва, ИИЛ, 1962, 829 с.

ARTIQLAŞMIŞ XARAKTERİSTİK Lİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR SİSTEMİNİN ANALİTİK HƏLLƏRİ

M.İ.ƏLİZADƏ

XÜLASƏ

Bu məqalədə artıqlaşmış xaraкteristiк diferensial tənliкlər sisteminin analitiк həllini aşкar şəкildə almaq üçün reккurent operator sistemi alınır. Bunun üçün isbat edilmişdir кi, əgər $y(f)$ funкsiyası Li qrupunda təyin olunubsa, qiymətləri isə E_y fəzasında yerləşirsə və birinci tərtibdən xaraкteristiк Li diferensial tənliкlər sisteminin həllidirsə, onda bu həll eyni zamanda κ tərtibdən Li diferensial tənliкlər sisteminin də həllidir. Xüsusi halda bu reккurent operatorlar ifadəsində sistemin tam həll olunma şərtləri də tapılır.

ANALITIC SOLUTIONS OF THE SYSTEM OF AVERDETERMINED CHARACTERISTIC LEE DIFERENSIAL EQUATIONS

M.I.ALIZADE

SUMMARY

In this article is obtained the system of recursion operators for the explicit form of the analytic solution of system of over determined characteristic deferential equations. It is proved, that if y(f) defines in Lee group, range belongs to the space Ey and is a solution of the system of characteristic Lee deferential equations of the first order , then this solution is a solution of the system of Lee deferential equations. In particular, the complete solvability properties of the system is founded in the expression of the recursion operators.